

семинарист: Селезнёва Светлана Николаевна

программа: <http://matheuf.cs.msu.ru>

Математическая логика и логическое программирование. (семинары)

13.09.10.
Семинар №1.

Лексикон

1. Предметные переменные. **Var**
 x, y, z
2. Предметные константы (константные символы) **Const**
 a, b, c
3. Функциональные символы. **Func.**
 $f^n, g^n, h^n, n_i \geq 1$.
4. Предикатные символы. **Pred**
 $P^m, Q^m, R^m, m \geq 0$

5. Связки.

- $\neg$ - отрицание "не".
- $\&$ - конъюнкция "и".
- $\vee$ - дизъюнкция "или".
- $\rightarrow$ - импликация "если..., то...".
- $\equiv$ - равносильность "...тогда, и только тогда...".

6. Кванторы

- $\forall$ - всеобщность "для любого", "для каждого".
- $\exists$ - существование "для какого-то", "хотя бы для одного".

7. Служебные символы.

$(,), , ?$

Терм (определение по индукции):

$t \in Var_t$ - лн-во переменных терм t .

- 1) $x \in Var, t = x$ - терм, $Var_t = \{x\}$
- 2) $a \in Const, t = a$ - терм, $Var_t = \emptyset$.
- 3) Если $t_1, \dots, t_n$ - термы, $f^n \in Func$, то $f(t_1, \dots, t_n)$ - терм, $Var_t = \bigcup_{i=1}^n Var_{t_i}$

Формула (определение по индукции):

- 1) $t_1, \dots, t_m$ - термы, $P^m \in Pred$, $P(t_1, \dots, t_m)$ - формула атом. $Var_{P(t_1, \dots, t_m)} = \bigcup_{i=1}^m Var_{t_i}$
- 2) φ, ψ - ф-лы. $(\neg \varphi), (\varphi \& \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$. $Var_{\neg \varphi} = Var_{\varphi}$; $Var_{\varphi \& \psi} = Var_{\varphi} \cup Var_{\psi}$.
- 3) φ - ф-ла, $x \in Var$ тогда ф-ла составная. $(\forall x \varphi), (\exists x \varphi)$ - ф-лы. $Var_{\forall x \varphi} = Var_{\varphi} \setminus \{x\}$.

Пример:

$$\Sigma = (Var, Const, Func, Pred)$$

$$\Sigma = (a, f^1, g^2, P^1)$$

$x, a, f(a), g(x, f(a))$ - термы

$P(g(x, f(a)))$ $\{x\}$ -мн-во перем.

$(\exists x P(x)) \rightarrow P(x)$ $\{x\}$ -мн-во перем.

$\varphi(x)$ свободные переменные

1. Внешние скобки - опускаются

2. Приоритет:

- 1) $\neg, \forall, \exists$
- 2) $\wedge, \vee$
- 3) $\rightarrow$

Пример:

$$\varphi = (((\forall x (\exists y Q(x, y))) \rightarrow (\neg (\exists x (\forall y Q(y, x))))))$$

$Var \varphi = \emptyset$ Замкнутая ф-ла (или предложение)

$$(\forall x \varphi) \quad (\exists x \varphi)$$

связь действия квантора $\forall$ (или $\exists$)
с входящими перем. x из-за связности.

$$f(x) = e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad \text{в выражении } i \text{ и } x \text{ - перем.}$$

i - связанная, f от нее не зависит.

Упр. 1.1.

1. L^2 -двухместный предикат, $L(x, y)$ - "x любит y".

$$\forall x L(x, x) \rightarrow \exists x \exists y L(x, y)$$

2. Если задача имеет реш-е, то математик может ее решить....

$P3^1(x)$ - "x-разрешимая задача"

$P(x, y)$ - "матем. x может решить задачу y".

$M(x)$ - "x-математик".

$3(x)$ - "x-задача".

$\exists$ - квантор

$\exists 3$ - кванторизация "эта задача".

M/3

$$\varphi = \varphi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \varphi_3$$

$$(\forall y (M(y) \rightarrow P(y, x))) \leftarrow \text{можно ли так?}$$

$$\varphi_1 = \forall x (P3(3(x)) \rightarrow \forall y (P(y, P3(x)))) \quad \text{или} \quad \forall x (P3(x) \rightarrow \forall y (P(y, x)))$$

$$\varphi_2 = M(9) \& \neg P(9, \exists 3)$$

$$\varphi_3 = \neg P3(\exists 3)$$

н.д.

$C(x)$ - "х-кварц"

$S(x)$ - "х-шар"

$B(x)$ - "верный предмет х"

$W(x)$ - "дешевый предмет х"

$U(x, y)$ - "предмет х лучше чем у"

$$1. \exists x (S(x) \& \forall y (C(y) \& B(y) \rightarrow U(x, y)))$$

если все предметы являются шаром А, то все они лучше В.

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$

$$\exists (A(x) \& B(x))$$

$$2. \neg (\exists x (W(x) \& C(x) \& (\exists y (B(y) \& S(y) \& U(x, y))))))$$

н.б.

$P(x)$ - "х- (.) на тропе"

$L(x)$ - "х-лестница на тропе"

$B(x, y)$ - "х-лестница на тропе у"

$E(x, y)$ - "х-связка с у" (можно с (.), можно с тропой)

$$1. \forall x \forall y (P(x) \& P(y) \& (\neg E(x, y)) \rightarrow \exists z (L(z) \& B(x, z) \& B(y, z) \& (\forall w (L(w) \& B(x, w) \& B(y, w) \rightarrow E(z, w))))))$$

Интерпретация

$$\Sigma = (Const, Func, Pred)$$

$$I = (D_I, Const, Func, Pred)$$

$$D_I \neq \emptyset$$

$$a \in Const \rightarrow \bar{a} \in D_I$$

$$f^i \in Func \rightarrow \bar{f}^i : D_I^i \rightarrow D_I$$

$$p^m \in Pred \rightarrow \bar{p}^m : D_I^m \rightarrow \{1, 0\}$$

истина лже.

Пример: $\Sigma = (a, f, g, p)$

$$I_1 = (N, 1, x+1, x \cdot y, x - \text{remainder})$$

$$I_2 = (0, 1, 0, f(0)=1, f(1)=0, g(x, y)=0, p(0)=1, p(1)=0)$$

Значение термов в интерпретации I $t(x_1, \dots, x_n)$
 Значение формулы в I $\varphi(x_1, \dots, x_n)$

$$t(x_1, \dots, x_n) [b_1, \dots, b_n] \in \mathcal{D}_I, b_i \in \mathcal{D}_I.$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) [b_1, \dots, b_n]$$

$$I \models \varphi(x_1, \dots, x_n) [b_1, \dots, b_n]$$

$$I \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow I \models \varphi \text{ или } I \models \psi$$

$$I \models P(t_1, \dots, t_n) [b_1, \dots, b_n]$$

$$I \models \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow I \models \psi \text{ или } I \not\models \varphi.$$

$$I \models \forall x \varphi(x, x_1, \dots, x_n) [b_1, \dots, b_n] \Leftrightarrow \text{на любом } b \in \mathcal{D}_I \quad I \models \varphi(b, x_1, \dots, x_n) [b_1, \dots, b_n].$$

$$\frac{N}{\Sigma^1_1 = (\Sigma^3, P^3)}$$

$$I = (NU\text{об}, \bar{S}, \bar{P})$$

$$\bar{S}(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x + y = z$$

$$\bar{P}(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x \cdot y = z.$$

$$1. \varphi(x) = 1 \text{ в } I \Leftrightarrow x = 0$$

$$S(x, x, x)$$

$$2. x = 1$$

$$P(x, x, x)$$

$$3. \varphi(x) = 1 \text{ в } I \Leftrightarrow x = 2$$

$$\forall y \forall z (\varphi_2(y) \& \varphi_2(z) \rightarrow S(y, z, x))$$

$$\varphi_2(x) = P(x, x, x) \& S(x, x, x)$$

$$\exists y (S(x, x, y) \& P(x, x, y))$$

$$5. \exists y S(y, y, x)$$

Д/з: Занятие 1.

$$н1.1(3)$$

$$н1.2(3-6)$$

$$н1.3(2,3)$$

$$н1.4(1-(4,6))$$

$$2-(1,3)$$

27.09.10.
Семинер №2

Верификация:

1. выполнимость

$$\exists I \exists d_1, \dots, d_n \in D_I$$

$$I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n].$$

2. истинность в I.

$$\forall d_1, \dots, d_n \in D_I$$

$$I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$$

I-модель для φ .

3. общезначимость

$$\forall I \forall d_1, \dots, d_n \in D_I$$

$$I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$$

$$\forall I I \models \varphi \quad \text{Общезнач.: } \models \varphi.$$

4. невыполнимость

$$\forall I \forall d_1, \dots, d_n \in D_I$$

$$I \not\models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n].$$

№2.1.

$$1) \varphi = \exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} I_1 = (D_{I_1} = \{0, 1, P\}) \\ P(0) = 1, P(1) = 1 \end{array} \right\} I_1 \models \varphi \text{ истинна}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_2 = (D_{I_2} = \{0, 1, P\}) \\ P(x) = F \end{array} \right\} I_2 \not\models \varphi \text{ — не общезначима.}$$

$$2) \exists x P(x) \vee \exists x \neg P(x)$$

$$I_1: I_1 \models \varphi \quad \text{истинна}$$

$$x \neq 0$$

$$\forall a \in D \quad \left. \begin{array}{l} P(a) = 1 \\ P(a) = 1 \Rightarrow \neg(P(a)) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \models \varphi \text{ — общезначима.}$$

$$\varphi = \neg x \exists y \neg z (P(x,y) \rightarrow P(y,z))$$

$$P(x,y) = u \quad \forall x,y \in I.$$

$$\mathcal{H}(1,2)$$

$$P(x,y) = u \Leftrightarrow x > y \quad \text{выполнено}$$

выполнено?

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}.$$

$$\vdash \varphi_1 \& \dots \& \varphi_k \rightarrow \varphi$$

$$\vdash A_1 \& \dots \& A_5 \rightarrow Th \quad \text{так не получится док-во корректно.}$$

$$\vdash \varphi?$$

Семантические таблицы.

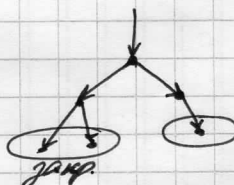
$$T = \langle \Gamma | \Delta \rangle$$

$$T_\varphi = T_{\emptyset, \varphi} = \langle \emptyset | \varphi \rangle$$

Виды семантических таблиц:

1. открытая $P(t_1, \dots, t_m)$

2. замкнутая $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset.$



Если правая ветвь - Закрытие не надо, или можно начать с нуля.

Порядок присвоения:

Правила:

$\forall (субст)$ и $\exists (субст)$, т.е. прав., где подставляется терм (Ф-м 5 и последние)

Правила 3, 4, 8 - в посл. очередь (или сложные)

(H)

к.д.2. Каким док-во удовлетворяется.

1. $\varphi = \exists x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)$

$$T_0 = \langle \emptyset | \varphi \rangle$$

от противного (делаем φ из ложной).

$$\downarrow R \rightarrow$$

$$T_1 = \langle \exists x P(x) | \neg \forall x \neg P(x) \rangle$$

$$\downarrow R^1$$

$$T_2 = \langle \neg \forall x \neg P(x); \exists x P(x) | \emptyset \rangle$$

$$\downarrow L \exists$$

$$T_3 = \langle \neg \forall x \neg P(x); P(c_1) | \emptyset \rangle$$

$$\downarrow L \forall$$

$$T_4 = \langle \neg \forall x \neg P(x); P(c_1); \neg P(c_1) | \emptyset \rangle$$

$$T_5 = \langle \neg \forall x \neg P(x); P(c_1) | P(c_1) \rangle \Rightarrow L \cap \Delta = \{P(c_1)\}.$$

т.е. с. с. с. с. с.

закрытая таблица $\Rightarrow$ абс. удовлетворяется.

$$2. \varphi = \exists x \forall y R(x, y) \rightarrow \forall y \exists x R(x, y)$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \exists x \forall y R(x, y) \rightarrow \forall y \exists x R(x, y) \rangle$$

↓ R→

$$T_1 = \langle \exists x \forall y R(x, y) \mid \forall y \exists x R(x, y) \rangle$$

↓ L∃

$$T_2 = \langle \forall y R(c_1, y) \mid \forall y \exists x R(x, y) \rangle$$

↓ L∀

$$T_3 = \langle \forall y R(c_1, y) \mid \exists x R(x, c_2) \rangle$$

↓ L∀

$$T_4 = \langle R(c_1, c_2) \mid \exists x R(x, c_2) \rangle$$

↓ R∃

$$T_5 = \langle R(c_1, c_2) \mid \exists x R(x, c_2), R(c_1, c_2) \rangle$$

мысли так: если
заключим в квантор
такой квантор не! → противоречие.

т.к. если было бы верно, то существовало бы const, к-е. г. не было бы. (заключ. с квант. → c₁ и c₂)

$$4. \varphi = \forall x \exists y \forall z (P(x, y) \rightarrow P(y, z))$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x \exists y \forall z (P(x, y) \rightarrow P(y, z)) \rangle$$

↓ R∀

$$T_1 = \langle \emptyset \mid \exists y \forall z (P(c_1, y) \rightarrow P(y, z)) \rangle$$

↓ R∃

$$T_2 = \langle \emptyset \mid \forall z (P(c_1, c_1) \rightarrow P(c_1, z)), \exists y \forall z (P(c_1, y) \rightarrow P(y, z)) \rangle$$

↓ R∀

$$T_3 = \langle \emptyset \mid P(c_1, c_1) \rightarrow P(c_1, c_2), \varphi_1 \rangle$$

↓ R→

$$T_4 = \langle P(c_1, c_1) \mid P(c_1, c_2), \varphi_1 \rangle$$

↓ R∃

$$T_5 = \langle P(c_1, c_1) \mid P(c_1, c_2), \forall z (P(c_1, c_1) \rightarrow P(c_2, z)) \rangle$$

↓ R∀

$$T_6 = \langle P(c_1, c_1) \mid P(c_1, c_2), P(c_1, c_2) \rightarrow P(c_2, c_3), \varphi_1 \rangle$$

↓ R→

$$T_7 = \langle P(c_1, c_1), P(c_1, c_2) \mid P(c_1, c_2), P(c_2, c_3), \varphi_1 \rangle$$

противоречие!

12.2.

$$\varphi = \exists x (P(x) \vee R(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \vee \exists x R(x))$$

$$T_0 = \langle \emptyset, \varphi \rangle$$

↓ R→

$$T_1 = \langle \exists x (P(x) \vee R(x)) \mid \exists x P(x) \vee \exists x R(x) \rangle$$

↓ R∨

$$T_2 = \langle \exists x (P(x) \vee R(x)) \mid \exists x P(x), \exists x R(x) \rangle$$

↓ L∃

$$T_3 = \langle P(c_1) \vee R(c_1) \mid \exists x P(x), \exists x R(x) \rangle$$

↓ L∨

$$T_4' = \langle P(c_1) \mid \exists x P(x), \exists x R(x) \rangle$$

↓ R∃

$$T_5' = \langle P(c_1) \mid \exists x P(x), P(c_1), \exists x R(x) \rangle$$

напр. $\exists x \rightarrow$ $\exists x R(x)$

$$T_4'' = \langle R(c_1) \mid \exists x P(x), \exists x R(x) \rangle$$

↓

$$T_5'' = \langle R(c_1) \mid \exists x P(x), \exists x R(x), R(c_1) \rangle$$

заключ. $\exists x R(x)$

№2.3.

$$\varphi = \forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)).$$

$$T_0 = \langle \emptyset, \varphi \rangle$$

$\downarrow R \rightarrow$

$$T_1 = \langle \forall x (P(x) \vee Q(x)) \mid \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \rangle$$

$\downarrow R \vee$

$$T_2 = \langle \forall x (P(x) \vee Q(x)) \mid \forall x P(x), \forall x Q(x) \rangle$$

$\downarrow R \wedge$

$$T_3 = \langle \forall x (P(x) \vee Q(x)) \mid P(c_1), \forall x Q(x) \rangle$$

$\downarrow R \vee$

$$T_4 = \langle \forall x (P(x) \vee Q(x)) \mid P(c_1), Q(c_2) \rangle$$

$\downarrow L \wedge$

$$T_5 = \langle P(c_1) \vee Q(c_1), \varphi_1 \mid P(c_1), Q(c_2) \rangle$$

$\downarrow L \vee$

$$T_6 = \langle P(c_1), \varphi_1 \mid P(c_1), Q(c_2) \rangle$$

$$T_6'' = \langle Q(c_1), \varphi_1 \mid P(c_1), Q(c_2) \rangle$$

$$T_7'' = \langle Q(c_1), \varphi_1, P(c_2) \mid P(c_1), Q(c_2) \rangle \rightarrow \text{не дойд.} //$$

$$D_I = \{c_1, c_2\}$$

$$P(c_2) = Q(c_1) = 1$$

$$P(c_1) = Q(c_2) = 1$$

$$I \models \varphi.$$



Действительно не существует модели, где был истинен.

№2.4

$\exists \varphi?$

$$1. \forall I \quad |D_I| \geq 3 \Rightarrow I \models \varphi.$$

$$2. \exists I' \quad I' \models \varphi.$$

Order: Изб. ф-м $\exists$.

Д/ф: Подумать, почему!

Д/ф: Задача.

№2.2 (35-7, 9-12)

№2.3 (2)

№2.4

№2.5. + модальность



$$\models \varphi \rightarrow \neg \varphi = \varphi_1$$

$$\varphi_1 \sim \Pi \Pi$$

$$\text{ПНФ } Q_1 x_1 \dots Q_n x_n M(x_1, \dots, x_n)$$

$$Q_i \in \{\forall, \exists\}$$

$$M(x_1, \dots, x_n) = D_1 \& \dots \& D_m$$

1) Переименование:

$$\forall x \psi(x) \equiv \forall y \psi(y) \quad - y \text{ не совпад. с совб. вход. змн.}$$

2) Удаление $\rightarrow$:

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

3) Продвижение $\neg$:

$$\neg(A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

$$\neg \forall x A \equiv \exists x \neg A$$

$$\neg \neg A = A$$

4) Вынесение кванторов:

$$\forall x \psi_1(x) \& \psi_2 \equiv \forall x (\psi_1(x) \& \psi_2)$$

↑
 ψ_2 не х?

5) Приведение к КНФ:

$$A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$$

$$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$$

н3.1. (1,3,6)

$$1) \exists x \forall y P(x, y) \& \forall x \exists y P(y, x)$$

$$\exists x_1 \forall y_1 P(x_1, y_1) \& \forall x_2 \exists y_2 P(y_2, x_2)$$

$$3) \neg \forall y (\exists x P(x, y) \rightarrow \forall u (R(y, u) \rightarrow \neg \forall z (P(z, u) \vee \neg R(z, y))))$$

$$\neg \forall y (\neg \exists x P(x, y) \vee \forall u (\neg R(y, u) \vee \neg \forall z (P(z, u) \vee \neg R(z, y))))$$

$$\exists y (\neg (\forall x \neg P(x, y) \vee \forall u (\neg R(y, u) \vee \exists z (\neg P(z, u) \& R(z, y))))$$

$$\exists y (\exists x P(x, y) \& \exists u (R(y, u) \& \forall z (\neg P(z, u) \& R(z, y))))$$

$$\exists y \exists x \exists u \forall z (\exists x P(x, y) \& R(y, u) \& (P(z, u) \vee \neg R(z, y)))$$

$$6) \exists x (\forall x P(x, x) \vee \exists x \neg R(x)) \rightarrow \exists x (R(x) \rightarrow \exists y P(f(x), y)).$$

$$\neg \exists x_1 (\forall x_2 P(x_2, x_2) \vee \exists x_3 \neg R(x_3)) \vee \exists x_4 (R(x_4) \rightarrow \exists y P(f(x_4), y)).$$

здесь не x_1

$$\neg \exists x_1 (\forall x_2 P(x_2, x_2) \vee \exists x_3 \neg R(x_3)) \vee \exists x_4 (\neg R(x_4) \vee \exists y P(f(x_4), y)).$$

$$\forall x_1 (\neg \forall x_2 P(x_2, x_2) \& \neg \exists x_3 \neg R(x_3)) \vee \exists x_4 (\neg R(x_4) \vee \exists y P(f(x_4), y)).$$

$$\forall x_1 (\exists x_2 \neg P(x_2, x_2) \& \forall x_3 R(x_3)) \vee \exists x_4 (\neg R(x_4) \vee \exists y P(f(x_4), y)).$$

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 (\neg P(x_2, x_2) \& R(x_3) \vee \neg R(x_4) \vee P(f(x_4), y)).$$

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 \exists y ((\neg P(x_2, x_2) \vee \neg R(x_4) \vee P(f(x_4), y)) \& (R(x_3) \vee \neg R(x_4) \vee P(f(x_4), y))).$$

ССР (Скалемовские стандартные формулы)

$$\forall x_1 \dots \forall x_m (D_1 \& \dots \& D_n)$$

Скалемовские

$$\forall x_1 \dots \forall x_k \exists x_{k+1} \varphi(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_k \varphi(x_1, \dots, x_k, f(x_1, \dots, x_k)).$$

н.з.д. (1, 2, 4, 6).

$$1) \forall x \exists y \forall z \exists u R(x, y, z, u) \quad (\text{не } f(x, z), \text{ т.к. до этого } y \text{ уже было только } \forall x.)$$

$$\forall x \forall z R(x, f(x), z, g(x, z)).$$

$$2) \neg \forall x (\exists y R(x, y) \rightarrow \forall z P(z, x))$$

$$\exists x \neg (\exists y R(x, y) \vee \forall z P(z, x))$$

$$\exists x (\exists y R(x, y) \& \neg \forall z P(z, x))$$

$$\exists x (\exists y R(x, y) \& \exists z \neg P(z, x))$$

$$\exists x \exists y \exists z (R(x, y) \& \neg P(z, x))$$

$$R(a, b) \& \neg P(c, a)$$

$$3) \exists x \exists y (P(x, y) \rightarrow R(x)) \rightarrow \forall x (\neg \exists y P(x, y) \vee R(x))$$

$$\exists x \exists y_1 (\neg P(x_1, y_1) \vee R(x_1)) \rightarrow \forall x_2 (\forall y_2 \neg P(x_2, y_2) \vee R(x_2))$$

$$\neg \exists x_1 \exists y_1 (\neg P(x_1, y_1) \vee R(x_1)) \vee \forall x_2 \forall y_2 (\neg P(x_2, y_2) \vee R(x_2))$$

$$\forall x_1 \forall y_1 (P(x_1, y_1) \& \neg R(x_1)) \vee \forall x_2 \forall y_2 (\neg P(x_2, y_2) \vee R(x_2))$$

$$\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 (P(x_1, y_1) \& \neg R(x_1) \vee \neg P(x_2, y_2) \vee R(x_2))$$

$$\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 ((P(x_1, y_1) \vee \neg P(x_2, y_2) \vee R(x_2)) \& (\neg R(x_1) \vee \neg P(x_2, y_2) \vee R(x_2)))$$

$$6) \exists x (\forall x P(x, x) \vee \exists x \neg R(x)) \rightarrow \exists x (R(x) \rightarrow \exists y P(f(x), y))$$

$$\neg \exists x_1 (\forall x_2 P(x_2, x_2) \vee \exists x_3 \neg R(x_3)) \vee \exists x_4 (\neg R(x_4) \vee \exists y P(f(x_4), y))$$

$$\forall x_1 (\exists x_2 \neg P(x_2, x_2) \& \forall x_3 R(x_3)) \vee \exists x_4 \exists y (\neg R(x_4) \vee P(f(x_4), y))$$

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 (\neg P(x_2, x_2) \& R(x_3)) \vee \exists x_4 \exists y (\neg R(x_4) \vee P(f(x_4), y))$$

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 \exists y (\neg P(x_2, x_2) \& R(x_3) \vee \neg R(x_4) \vee P(f(x_4), y))$$

$$\forall x_1 \forall x_3 \exists x_2 \exists y (\neg P(f(x_1), f(x_1)) \& R(x_3) \vee \neg R(x_4) \vee P(f(x_4), y))$$

$$\forall x_1 \forall x_3 (\neg P(f(x_1), f(x_1)) \& R(x_3) \vee \neg R(g(x_1, x_3)) \vee P(f(g(x_1, x_3)), g(x_1, x_3)))$$

и т.д. - процедура к КНФ

или можно так:

$$\exists x_4 \exists y \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 (....)$$

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 (\neg P(x_2, x_2) \& R(x_3) \vee \neg R(a) \vee P(f(a), b))$$

$$\forall x_1 \forall x_3 (\neg P(f(x_1), f(x_1)) \& R(x_3) \vee \neg R(a) \vee P(f(a), b))$$

$$\forall x_1 \forall x_3 ((\neg P(f(x_1), f(x_1)) \vee \neg R(a) \vee P(f(a), b)) \& (R(x_3) \vee \neg R(a) \vee P(f(a), b)))$$

$$\theta_1 = \{x/f(x), y/g(x, z), u, v/f(c)\}$$

$$\theta_2 = \{x/f(y), y/c, z/g(y, v), u\}$$

$$\theta_1 \theta_2 = \{x/f(y), y/g(f(y), g(u, v)), u, v/f(c), z/g(y, v)\}$$

$$\theta h = d, \lambda(x) = (d(x))\eta$$

$$u3.4 (3, 1, 2, 5)$$

$$3) R(z, f(x, b, z))$$

$$= R(h(x), f(g(a), y, z))$$

$$\begin{cases} z = h(x) \\ f(x, b, z) = f(g(a), y, z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = h(x) \\ x = g(a) \\ b = y \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = h(g(a)) \\ x = g(a) \\ y = b \end{cases}$$

$$\theta = \{x/g(a), y/b, z/h(g(a))\}$$

$$1) P(c, x, f(x))$$

$$= P(c, y, y)$$

$$\begin{cases} c = c \\ x = y \\ f(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = f(y) \end{cases}$$

исч. ил. пер. в свободной переменной

близко к замене $f(\dots) = g(\dots)$ -
тоже исч. ил. пер. в.

$$2) P(f(x, y), z, h(z, y))$$

$$= P(f(y, x), g(y), V)$$

$$\begin{cases} f(x, y) = f(y, x) \\ z = g(y) \\ h(z, y) = V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = g(y) \\ V = h(g(y), y) \end{cases}$$

$$\Theta = \{x/y, z/g(y), V/h(g(y), y)\}$$

$$5) P(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$= P(f(c, c), f(x_1, x_1), f(x_2, x_2), f(x_3, x_3))$$

вопрос. эквивалентные выражения
как хранить в памяти? (поиск линейно)
лучше хранить?

$$\begin{cases} x_1 = f(c, c) & x_1 = f(c, c) \\ x_2 = f(x_1, x_1) & x_2 = f(f(c, c), f(c, c)) \\ x_3 = f(x_2, x_2) & x_3 = f(f(f(c, c), f(c, c)), f(f(c, c), f(c, c))) \\ x_4 = f(x_3, x_3) & x_4 = f(f(f(f(c, c), f(c, c)), f(f(c, c), f(c, c))), f(f(f(c, c), f(c, c)), f(f(f(c, c), f(c, c)), f(f(c, c), f(c, c)))) \end{cases}$$

$$\Theta = \{x_1/f(c, c), x_2/f(f(c, c), f(c, c)), x_3/\dots, x_4/\dots\}$$

Д/з: додел. рекурсивные номера и т.д.

$\models \varphi$?

$$\varphi_0 = \neg \varphi$$

$$\varphi_1 = \Pi \Pi \varphi_0$$

$$\varphi_2 = \text{CC} \varphi_1$$

$$S_\varphi = \{D_1, \dots, D_m\}$$

предваряющая
нормальная
форма

25.10.10.
Семинатор #4.

1. Правило резолюции

$$D_1 = D_1' \vee L_1$$

L_1, L_2 - атомы

$$D_2 = D_2' \vee L_2$$

$\Theta = \text{НОУ}(L_1, L_2)$ - ? ^{наименьший} общий множитель

$$\text{Резольвента } D = D_1' \Theta \vee D_2' \Theta$$

2. Правило склейки

$$D_1 = D_1' \vee L_1 \vee L_2$$

L_1, L_2 - литеры

$$D = D_1' \Theta \vee L_1 \Theta$$

$\Theta = \text{НОУ}(L_1, L_2)$

Вводим в S

$D_1, D_2, \dots, D_n$, где

$$1) D_i \in S$$

получены по правилу резолюции

$$D_j, D_k, j, k \leq i$$

получены по правилу склейки

$$D_j, j < i$$

$$2) D_n = D$$

□ - пустой дизъюнкт (один заведомо ложн. ф-лу)

S - непротив. $\Leftrightarrow$ в S резолют. вводятся □.

4.2. (3)

$$S = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$$

$$\varphi = \neg (x \wedge D_1 \wedge D_2 \wedge D_3 \wedge D_4)$$

$$D_1 = P(y, f(x))$$

$$D_2 = \neg Q(y) \vee \neg Q(z) \vee \neg P(y, f(z)) \vee Q(b)$$

$$D_3 = Q(b)$$

$$D_4 = \neg Q(a)$$

Переменные в формуле локальны.
 $\downarrow$
 переименовываем

$$D_1 = P(y_1, f(x_1))$$

$$D_2 = \neg Q(y_2) \vee \neg Q(z_2) \vee \neg P(y_2, f(z_2)) \vee Q(b_2)$$

$$D_3 = Q(b)$$

$$D_4 = \neg Q(a)$$

правильно
скажем

Составляем,

$$D_5 \xrightarrow{\{z_2/y_2\}} \neg P(y_1, f(y_2)) \vee Q(b_2) \vee \neg Q(y_2)$$

$$D_6 \xrightarrow{\{y_1/y_2, x_1/y_2\}} Q(b_2) \vee \neg Q(y_2)$$

$$D_7 \xrightarrow{\{y_2/b\}} Q(b_2)$$

$$D_8 \xrightarrow{\{b_2/a\}} \square$$

2.5.2.

$$1) D_1 = P(x_1, f(x_1))$$

$$D_2 = R(y_2, z_2) \vee \neg P(y_2, f(a))$$

$$D_3 = \neg R(c, x_3)$$

$$D_4 = R(x_4, y_4) \vee R(z_4, f(z_4)) \vee \neg P(z_4, y_4)$$

$$D_5 = P(x_5, x_5)$$

$$D_6 \xrightarrow{\{x_4/z_4, y_4/f(z_4)\}} R(z_4, f(z_4)) \vee \neg P(z_4, z_4)$$

$$D_7 \xrightarrow{\{z_4/x_5\}} R(x_5, f(x_5))$$

$$D_8 \xrightarrow{\{x_5/c, x_3/f(c)\}} \square$$

2.5.2.

N 4.3(1).

$$\varphi = \exists x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)$$

$$\varphi_0 = \neg \varphi = \neg (\exists x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x))$$

$$\varphi_1 = \exists x_1 \forall x_2 (P(x_1) \& \neg P(x_2)) - \text{ПНФ}$$

$$\varphi_2 = \forall x_2 (P(c_1) \& \neg P(x_2)) - \text{ССФ}$$

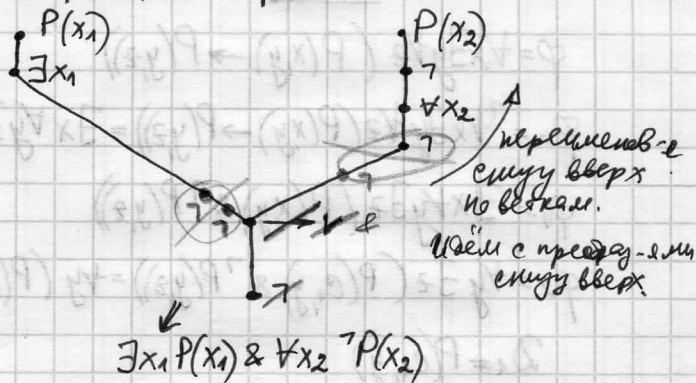
Получаем формулы: $S_\varphi = \{P(c_1), \neg P(x_2)\}$

$$D_1 = P(c_1)$$

$$D_2 = \neg P(x_2)$$

$$D_3 \xrightarrow{D_1, D_2} \square$$

Например, метод приведения к ПНФ:



N 4.3(2).

$$\varphi = \exists x_1 \forall y_1 R(x_1, y_1) \rightarrow \forall y_2 \exists x_2 R(x_2, y_2)$$

$$\varphi_0 = \neg (\exists x_1 \forall y_1 R(x_1, y_1) \rightarrow \forall y_2 \exists x_2 R(x_2, y_2)) = \exists x_1 \forall y_1 R(x_1, y_1) \& \neg \forall y_2 \exists x_2 R(x_2, y_2) = \exists x_1 \exists y_1 \forall y_2 \forall x_2 (R(x_1, y_1) \& \neg R(x_2, y_2)) = \varphi_1 - \text{ПНФ}$$

$$\varphi_2 = \forall y_1 \forall x_2 (R(c_1, y_1) \& \neg R(x_2, c_2)) - \text{ССФ}$$

$$S_\varphi = \{R(c_1, y_1), \neg R(x_2, c_2)\}$$

$$D_1 = R(c_1, y_1)$$

$$D_2 = \neg R(x_2, c_2)$$

$$D_3 \xrightarrow{D_1, D_2} \square$$

N 4.3(3).

$$\varphi = \neg x (P(x) \rightarrow \exists y R(x, f(y))) \rightarrow (\exists x \neg P(x) \vee \neg x \exists z R(x, z))$$

$$\varphi_0 = \neg \varphi$$

Дерево:

$$\varphi_1 = \exists x_3 \forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \forall z (\neg P(x_1) \vee R(x_1, f(y_1)) \& P(x_2) \& \neg R(x_3, z))$$

$$\varphi_2 = \forall x_1 \forall x_2 \forall z (\neg P(x_1) \vee R(x_1, f(g(x_1))) \& P(x_2) \& \neg R(c_1, z))$$

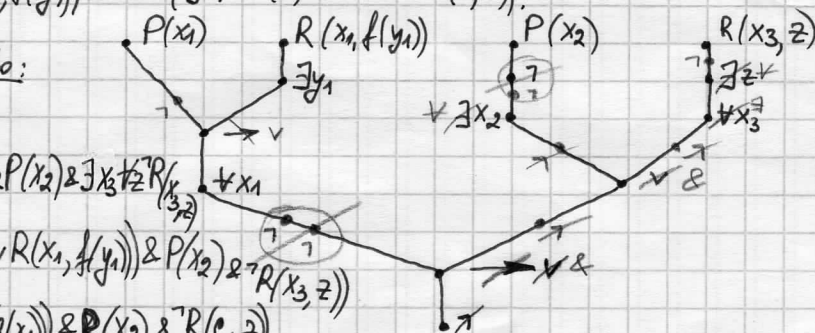
$$D_1 = \neg P(x_1) \vee R(x_1, f(g(x_1)))$$

$$D_2 = P(x_2)$$

$$D_3 = \neg R(c_1, z)$$

$$D_4 \xrightarrow{D_1, D_2} R(x, f(g(x)))$$

$$D_5 \xrightarrow{D_4, D_3} \square$$



№4.3(4)

$$\varphi = \forall x \exists y \forall z (P(x, y) \rightarrow P(y, z))$$

$$\varphi_0 = \neg \forall x \exists y \forall z (P(x, y) \rightarrow P(y, z)) = \exists x \forall y \exists z \neg (P(x, y) \vee P(y, z)) = \exists x \forall y \exists z (P(x, y) \wedge \neg P(y, z))$$

$$\varphi_1 = \exists x \forall y \exists z (P(x, y) \wedge \neg P(y, z))$$

$$\varphi_2 = \forall y \exists z (P(c_1, y) \wedge \neg P(y, f(y)))$$

$$D_1 = P(c_1, y)$$

$$D_2 = \neg P(y, f(y))$$

Переименов.: $D_1 = P(c_1, y_1)$

$$D_2 = \neg P(y_2, f(y_2))$$

$$D_3 \xrightarrow{D_1, D_2} \{y_2/c_1, y_1/f(c_1)\} \quad \square$$

Д/д: $\frac{34}{\text{№4.2(2)}}$
 №4.3(5,6)
 №4.4.

Датум: 29.12.10 : 3-й семестр - коллоквиум:

- 1) Вспомогательная логика предикатов.
- 2) Семантическая таблица.
- 3) Верный вывод.

+ Теор. вып. в виде тезиса:

(и.д. как вер-
 овиях, так и в
 и.д. и.д. и.д.)

- Опр. 8
- Теоремы/формулы
- + посылки, что они истинны.